

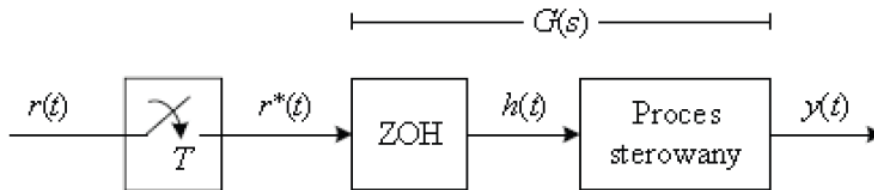


WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI I INFORMATYKI
INSTYTUT AUTOMATYKI I INFORMATYKI
KIERUNEK AUTOMATYKA I ROBOTYKA
STUDIA STACJONARNE I STOPNIA

PRZEDMIOT : : LABORATORIUM PODSTAW AUTOMATYKI

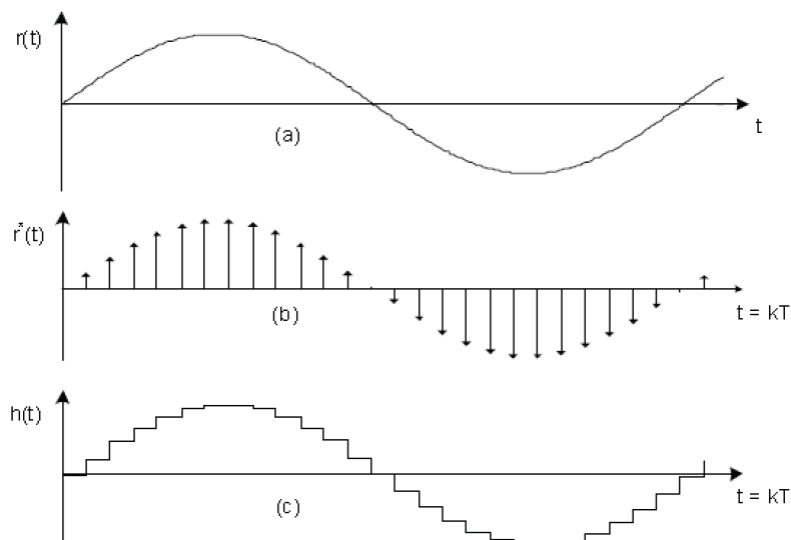
10. Dyskretyzacja ciągłych układów liniowych

Typowy, dyskretny układ otwarty może być przedstawiony za pomocą poniższego schematu blokowego:



Rys. 1. Schemat blokowy układu dyskretnego

Układ ten składa się z impulsatora, który próbkuje wejściowy sygnał ciągły z okresem próbkowania T oraz z ekstrapolatora zerowego rzędu (ang. *Zero Order Hold*, ZOH).



Rys. 2. (a) Sygnał wejściowy do idealnego impulsatora, (b) Sygnał wyjściowy z impulsatora, (c) sygnał wyjściowy z ekstrapolatora zerowego rzędu (ZOH).

Na rysunku 2 pokazane zostały typowe operacje idealnego próbkowania i ekstrapolowania zerowego rzędu (ZOH). Sygnały ciągłe są próbkowane z okresem T i następnie ciąg impulsów $r^*(t)$ o amplitudach $r(t)$ jest ekstrapolowany przez okres próbkowania. Ekstrapolator zerowego rzędu (ZOH) podtrzymuje amplitudę sygnału doprowadzanego do wejścia w danej chwili czasu (kT) przez cały okres próbkowania T aż do pojawienia się następnego próbki w chwili $t = (k+1)T$. Wyjście z układu ekstrapolującego (ZOH) jest schodkową aproksymacją sygnału wejściowego idealnie próbkowanego $r(t)$ z impulsatora.

Układ dyskretny może być przedstawiony w przestrzeni stanów za pomocą **równań różnicowych**:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k)\end{aligned}$$

lub za pomocą **transmitancji dyskretniej** (transformaty Z dyskretniej odpowiedzi impulsowej):

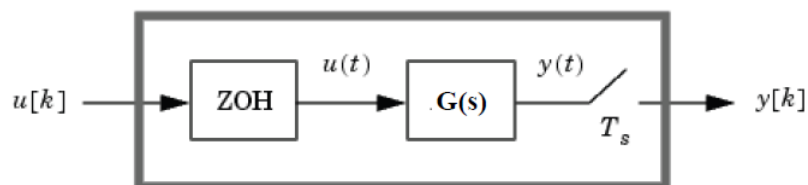
$$G(z) = K \frac{z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}$$

W Matlabie do konwersji systemów ciągłych na dyskretnie służą funkcje: `c2d`, `c2dm`, `c2dt`. Funkcja `c2d` dyskretyzuje ciągły układ liniowy `sys` dla okresu próbkowania T_s i zwraca jego dyskretny odpowiednik `sysD`:

```
sysD = c2d(sys, Ts, method)
```

String `method` oznacza metodę dyskretyzacji, do wyboru są:

- **zoh** (zero order hold – podtrzymanie zerowego rzędu)



Ekstrapolator **ZOH** generuje ciągły sygnał $u(t)$ poprzez podtrzymanie wartości każdej próbki $u[k]$ przez okres próbkowania:

$$u(t) = u[k] \quad \text{dla} \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

Sygnał $u(t)$ jest następnie podawany na wejście układu ciągłego $G(s)$, a sygnał wyjściowy $y(t)$ jest próbkowany z okresem T_s dając w wyniku sygnał dyskretny $y[k]$.

- **foh** (first order hold – podtrzymanie pierwszego rzędu, ekstrapolator trójkątny)
Ekstrapolator FOH stosuje liniową interpolację pomiędzy próbkami:

$$u(t) = u[k] + \frac{t - kT_s}{T_s} (u[k+1] - u[k]) \quad \text{dla} \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

FOH daje dokładniejsze wyniki niż ZOH dla układów z gładkim sygnałem wejściowym.

- **tustin** (aproxymacja Tustina – transformacja biliniowa)

W metodzie Tustina, mając transmitancję ciągłą $G(s)$, równoważna transmitancja dyskretna może być wyznaczona poprzez podstawienie:

$$G(z) = G(\hat{s}) \quad \text{gdzie} \quad \hat{s} = \frac{1}{tg(\frac{\omega T_s}{2})} \frac{z-1}{z+1}$$

gdzie ω jest częstotliwością, przy której transmitancja dyskretna ma taką samą wartość jak transmitancja ciągła.

- **matched** (metoda dopasowywania zer i biegunów)

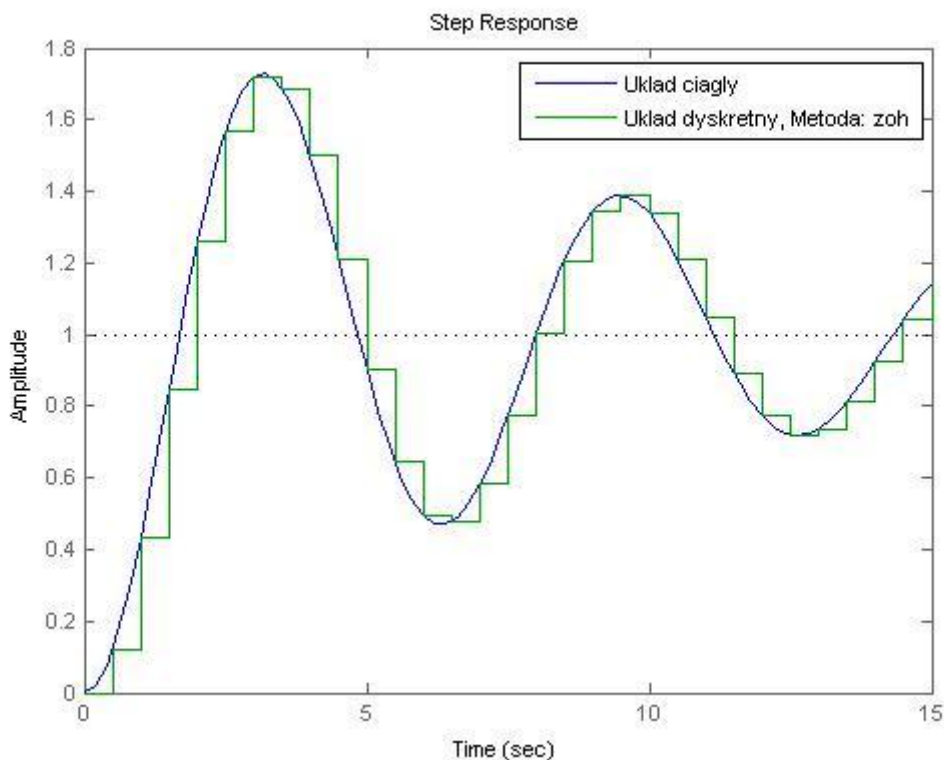
Jest to metoda uzyskiwania dyskretnego odpowiednika dla transmitancji ciągłej z wykorzystaniem zależności przekształcającej płaszczyznę s na płaszczyznę z przez przekształcenie $z = e^{sT_s}$

Zadanie 1.

Dokonać dyskretyzacji następującego układu ciągłego:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

Porównać transmitancję ciągłą z transmitancjami dyskretnymi dla różnych metod dyskretyzacji. Porównać odpowiedzi skokowe dla wszystkich metod (jak na poniższym rysunku). Opisać zauważone różnice. Przyjąć okres próbkowania $T_s = 0.5$.



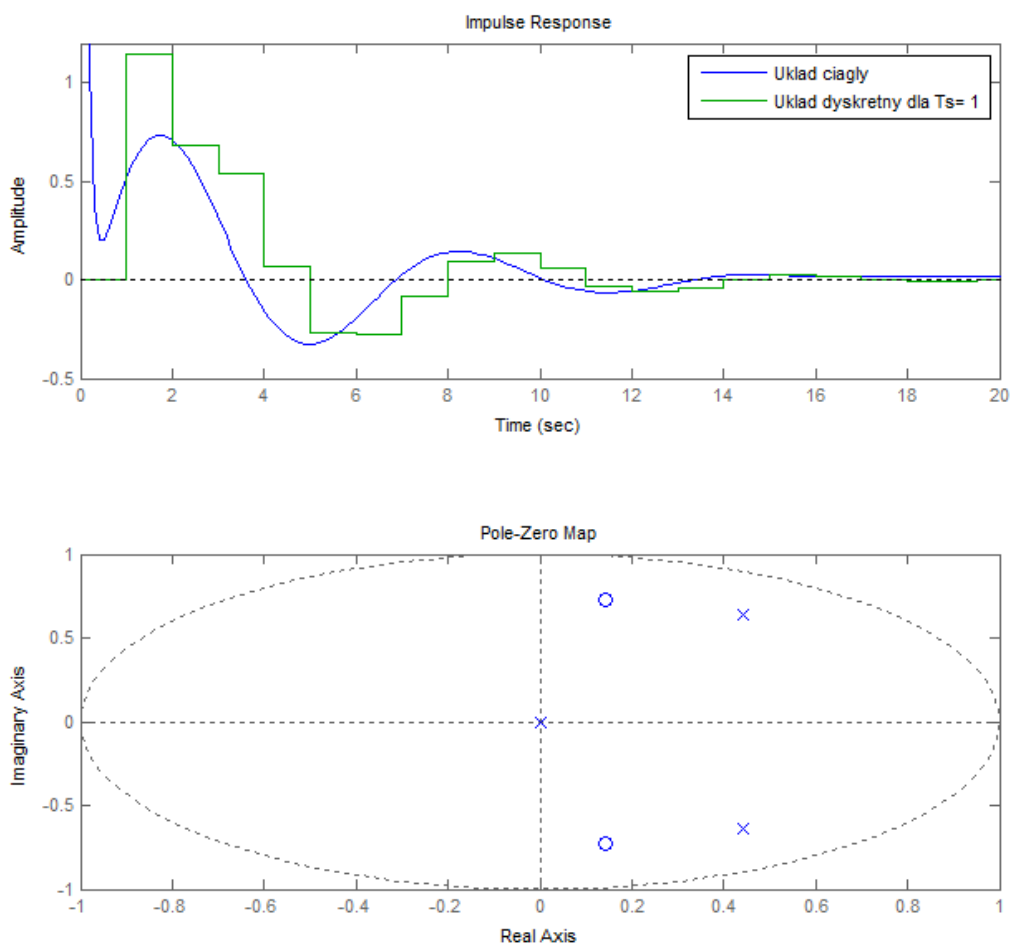
Zadanie 2.

Przeprowadzić dyskretyzację następującego układu:

$$G(s) = 10 \frac{s^2 + 0.2s + 2}{(s^2 + 0.5s + 1)(s + 10)}$$

Porównać odpowiedzi impulsowe układu dyskretnego dla metody *zoh* i różnych okresów próbkowania, tj. $T_s = 1; 0.5; 0.1; 0.01$. Jak się zmienia położenie zer i biegunów układu dyskretnego w zależności od wartości okresu próbkowania?

Przykładowy wynik działania skryptu:



Pomocne funkcje Matlab:

`printsys(num,den)` – wyświetla transmitancję ciągłą

`printsys(numD,denD,'z')` – wyświetla transmitancję dyskretną

`dstep(numD,denD)` – rysuje dyskretną odpowiedź skokową

`dimpulse(numD,denD)` – rysuje dyskretną odpowiedź impulsową

`pzmap(numD,denD)` – rysuje zera i bieguny na płaszczyźnie zespolonej

`pzmap(sysD)` – rysuje zera i bieguny na płaszczyźnie zespolonej wraz z okręgiem jednostkowym

`[num,den]=tfdata(sys)` – zwraca licznik i mianownik transmitancji na podstawie struktury `sys`