WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI I INFORMATYKI
INSTYTUT AUTOMATYKI I INFORMATYKI
KIERUNEK AUTOMATYKA I ROBOTYKA
STUDIA STACJONARNE I STOPNIA

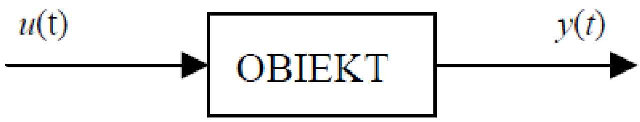
PRZEDMIOT : : LABORATORIUM PODSTAW AUTOMATYKI

2. REPREZENTACJA UKŁADÓW LTI W MATLABIE

W Matlabie istnieją trzy podstawowe sposoby reprezentacji układów LTI (ang. *Linear Time-Invariant*):
• za pomocą transmitancji (ang. *transfer function*),
• za pomocą zer, biegunów i wzmocnienia układu (ang. *zero/pole/gain*)
• w przestrzeni stanów (ang. *state space*)
Na ćwiczeniach należy wykonać w Matlabie wszystkie poniższe przykłady obrazujące zastosowanie różnych metod reprezentacji i konwersji liniowych układów dynamicznych.

1. Transmitancja

Dla obiektu o postaci:



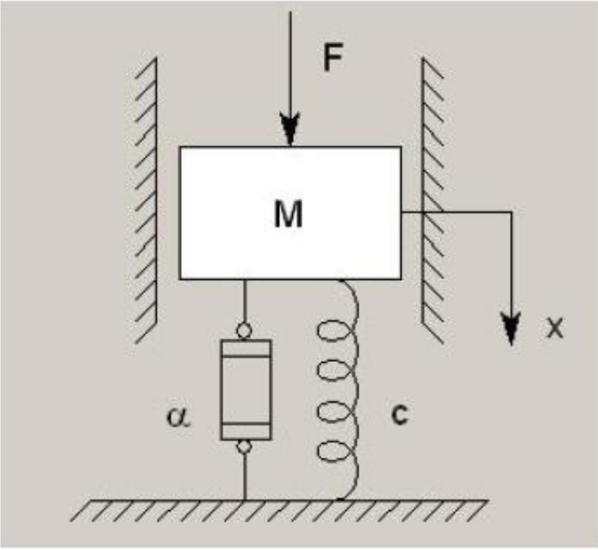
Transmitancja operatorowa (funkcja przejścia) to stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego Y(s) do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego U(s) przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Transmitancja w postaci wielomianowej jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}$$

Przykładowo, prosty model zawieszenia samochodowego można przedstawić za pomocą układu inercyjnego II rzędu. Taki model składa się z masy osadzonej na sprężynie i tłumiku. Pod wpływem siły zewnętrznej masa może się przemieszczać w osi pionowej. Schemat układu przedstawia poniższy rysunek.



Oznaczenia:

F – siła wymuszająca
M – masa „pojazdu"
x – przemieszczenie masy
α – stała tłumika
c – stała sprężyny

Układ można opisać równaniem różniczkowym II rzędu:

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = F$$

Aby policzyć transmitancję, obie strony równania należy poddać transformacie Laplace'a (zakładamy zerowe warunki początkowe):

$$Ms^2X(s) + \alpha sX(s) + cX(s) = F(s)$$

Po uporządkowaniu:

$$X(s)(Ms^2 + \alpha s + c) = F(s)$$

Zakładając, że $F(s)$ jest wejściem, a $X(s)$ wyjściem układu, transmitancja jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + \alpha s + c}$$

Przyjmij następujące parametry układu:

$$M = 1000;\ F = 1000;\ \alpha = 500;\ c = 400;$$

Aby zapisać tą transmitancję w Matlabie należy podać współczynniki licznika i mianownika, zaczynając od najwyższej potęgi *s*:

```
licz = [0 0 1];
mian = [1000 500 400];
```

Licznik i mianownik transmitancji w pełni charakteryzują obiekt, można ich używać jako argumenty np. funkcji **step** (odpowiedź skokowa) i **impulse** (odpowiedź impulsowa):

```
step(licz,mian);
impulse(licz,mian);
```

Innym sposobem jest zastosowanie funkcji **tf**:

```
obiekt = tf(licz,mian)
```

gdzie *obiekt* jest strukturą przechowującą wszystkie informacje o obiekcie. Aby wyświetlić pola tej struktury należy zastosować polecenie **get(obiekt).** *obiekt* można stosować podobnie jak licznik i mianownik transmitancji, np:

```
step(obiekt);
impulse(obiekt);
```

W wersji sfaktoryzowanej transmitancję można wyrazić jako:

$$G(s) = k\frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_m)}$$

gdzie: *z1...zn* – **zera**, *p1...pm* – **bieguny**, *k* – **wzmocnienie**.
W celu znalezienia zer (pierwiastków licznika transmitancji), biegunów (pierwiastków mianownika transmitancji) oraz wzmocnienia układu, można zastosować funkcję **tf2zp** (ang. ***t**ransfer **f**unction **to** **z**ero-**p**ole*) konwersji transmitancji do reprezentacji zera/bieguny/wzmocnienie:

```
[z, p, k] = tf2zp(licz, mian);
```

Wektor **z** zawiera zera układu, wektor **p** – bieguny, **k** – wzmocnienie.
Zera i bieguny można przedstawić graficznie na płaszczyźnie zespolonej za pomocą funkcji **pzmap**:

```
pzmap(p,z);
```

albo:

```
pzmap(licz,mian);
```

albo:

```
pzmap(obiekt);
```

1.1. Współczynnik tłumienia

Transmitancję można przedstawić w postaci standardowej (wyraz wolny mianownika jest jedynką):

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + \alpha s + c} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{M}{c}s^2 + \frac{\alpha}{c}s + 1}$$

Porównując ten wzór ze wzorem transmitancji dla układu inercyjnego II rzędu w postaci standardowej:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}$$

gdzie: $\boldsymbol{K}$ – wzmocnienie, $\boldsymbol{T}$ – stała czasowa, ξ - współczynnik tłumienia
można wyliczyć, że w naszym przypadku:

$$K = \frac{1}{c}$$

$$T = \sqrt{\frac{M}{c}}$$

$$\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{cM}}$$

Współczynnik tłumienia ξ określa charakter układu:

- dla $\xi < 1$ układ jest oscylacyjny
- dla $\xi \geq 1$ układ jest tłumiony

Zadanie 1

a) Odpowiedz na pytania:
  - czy bieguny są rzeczywiste?
  - czy układ jest stabilny?
  - czy układ jest nieminimalnofazowy? (czyli czy posiada zera w prawej półpłaszczyźnie s)

b) Za pomocą funkcji **`tf2zp`** oblicz zera, bieguny i wzmocnienie transmitancji i przedstaw ją w postaci sfaktoryzowanej.

c) Dobierz tak parametry układu aby zaobserwować odpowiedzi układu na skok jednostkowy w przypadku oscylacyjnym i tłumionym.

2. Zera, bieguny, wzmocnienie

Dany jest układ o transmitancji:

$$G(s) = \frac{3s + 1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{3\left(s + \frac{1}{3}\right)}{s(s+1)(s+3)}$$

Jak widać jest jedno zero z = –1/3 oraz trzy bieguny p1 = 0, p2 = –1, p3 = –3. Wzmocnienie wynosi k = 3. Licznik i mianownik transmitancji w postaci wielomianowej łatwo jest znaleźć stosując funkcję **`zp2tf`** (ang. *zero-**p**ole **to** **t**ransfer **f**unction*) konwersji reprezentacji zera/bieguny/wzmocnienie do transmitancji:

```
[licz,mian] = zp2tf(z, p, k);
```

czyli:

```
[licz,mian] = zp2tf(-1/3,[0 -1 -3],3);
```

Aby wyświetlić transmitancję należy wpisać:

```
printsys(licz, mian);
```

Innym sposobem jest zastosowanie funkcji **zpk**:

```
obiekt = zpk(-1/3,[0 -1 -3],3)
```

Zadanie 2.
Za pomocą funkcji *zpk* zapisz poniższą transmitancję:

$$G(s) = \frac{4s + 1}{s(0.2s + 1)(10s + 1)}$$

Uwaga: przed użyciem funkcji **zpk** transmitancję należy przekształcić tak, aby współczynnikiem przy każdym *s* była jedynka.

3. Przestrzeń stanów

Obiekt w tzw. „przestrzeni stanów" jest opisany za pomocą układu równań:

$$\begin{cases} x = A\dot{x} + Bx \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

gdzie **u** jest wejściem, **y** – wyjściem, **x** – stanem układu.
Współrzędne stanu wybiera się zazwyczaj jako wyjścia z integratorów (bloków całkujących). W naszym przypadku (modelu zawieszenia) możemy wybrać jako zmienne stanu przemieszczenie *x* oraz prędkość *dx/dt*:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

zmienne stanu

Wobec tego, pochodne zmiennych stanu wynoszą:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = \dfrac{F}{M} - \dfrac{\alpha}{M} x_2 - \dfrac{c}{M} x_1 \end{cases}$$

co można zapisać w postaci macierzowej dla równania stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{M} & -\dfrac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}$$

i dla równania wyjścia:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Macierze A, B, C, D wynoszą więc:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{M} & -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Aby zamienić reprezentację zera/bieguny/wzmocnienie lub transmitancję na reprezentację w przestrzeni stanów, należy zastosować funkcję:

```
[A,B,C,D] = zp2ss(z,p,k) % zero-pole to state space
```

lub:

```
[A,B,C,D] = tf2ss(licz,mian) % transfer function to state space
```

Macierze **A,B,C,D** w pełni charakteryzują obiekt, można ich używać jako argumenty np. funkcji **step** i **impulse**:

```
step(A,B,C,D);
impulse(A,B,C,D);
```

Aby obliczyć wzmocnienie w stanie ustalonym można zastosować funkcję **dcgain**:

```
k = dcgain(A,B,C,D);
```

Zadanie 3.
Dokonaj konwersji transmitancji modelu zawieszenia do przestrzeni stanów obiema metodami tj. za pomocą funkcji **zp2ss** oraz **tf2ss** i porównaj wyniki (czy macierze **A,B,C,D** są takie same? Czy odpowiedzi skokowe są takie same?).

4. Dokładność obliczeń

Funkcje MATLABa dają zazwyczaj wiarygodne wyniki. Należy jednak uważać w przypadku obliczeń zer i biegunów wielokrotnych oraz w przypadku układów wysokiego rzędu. Mogą pojawić się wtedy błędy numeryczne. Jako przykład weźmy układ bez zer i z 10 biegunami wielokrotnymi w $s = -1$, oraz ze wzmocnieniem $k = 1$:

```
z = [];
p = [-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1];
k = 1;
```

przejdź do transmitancji:

```
[licz, mian] = zp2tf(z, p, k);
```

przejdź z powrotem do reprezentacji z/p/k:

```
[z1, p1, k1] = tf2zp(licz, mian);
```

Obliczony wektor biegunów **p1** powinien być taki sam jak wektor zadany **p**, ale nie jest. Jaka jest różnica?

5. Wpływ zer i biegunów na kształt odpowiedzi skokowej

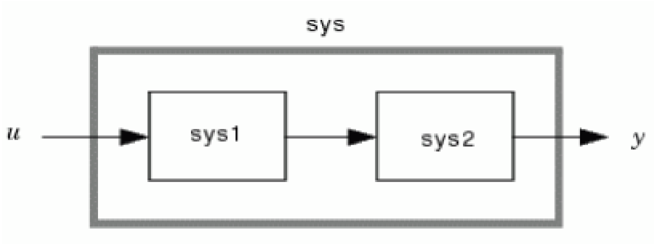
Ten przykład pokazuje wpływ położenia biegunów układu II rzędu na jego odpowiedź skokową. Poniższy kod generuje trójwymiarowy wykres 12 odpowiedzi skokowych dla układu z biegunami położonymi w $s = -n/4 \pm 3i$ gdzie n zmienia się od 1 do 12.

```
t=0:0.05:5;
dl=length(t);
LiczbaWykresow=12;
y=zeros(dl,LiczbaWykresow);
n=1;
while(n<=LiczbaWykresow)
      [licz,mian]=zp2tf([],[-n/4+3*i -n/4-3*i], (n/4)^2+9);
      [y(1:dl,n),x,tt]=step(licz,mian,t);
      n=n+1;
end
mesh(t,1:12,y');
```

Część urojona biegunów jest stałą i wynosi ±3i, natomiast część rzeczywista zmienia się od –0.25 do –3 z krokiem 0.25. Ostatni argument funkcji **`zp2tf`** (wzmocnienie) zapewnia normalizację stanu ustalonego do 1 dla wszystkich odpowiedzi (dlaczego?). Jak widać na rysunku, w miarę jak bieguny przesuwają się w lewo, układ staje się coraz mniej oscylacyjny (wzrasta współczynnik tłumienia) i układ staje się wolniejszy (wzrasta czas narastania).

6. Łączenie modeli

6.1. Łączenie szeregowe

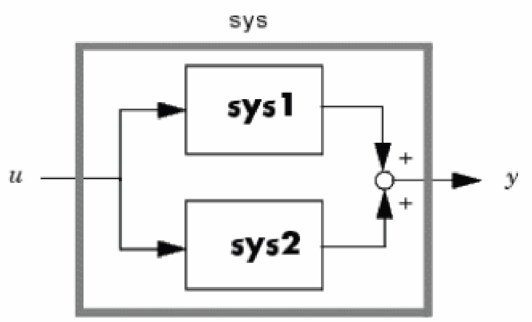


Dwa obiekty *sys1* i *sys2*, połączone szeregowo, można połączyć w jeden obiekt *sys* za pomocą funkcji **`series`**:

```
sys = series(sys1,sys2)
```

Transmitancja obiektu *sys* jest nazywana **transmitancją zastępczą** dla całego układu.

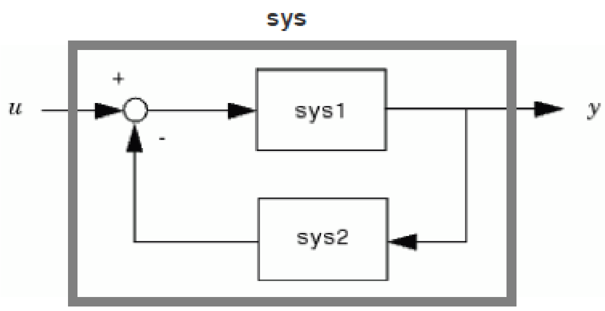
6.2. Łączenie równoległe



Dwa obiekty *sys1* i *sys2*, połączone równolegle, można połączyć w jeden obiekt *sys* za pomocą funkcji **`parallel`**:

```
sys = parallel(sys1,sys2)
```

6.3. Sprzężenie zwrotne



Dwa obiekty *sys1* i *sys2*, połączone za pomocą ujemnego sprzężenia zwrotnego, można sprowadzić do jednego obiektu *sys* za pomocą funkcji **`feedback`**:

```
sys = feedback(sys1,sys2)
```

W przypadku dodatniego sprzężenia zwrotnego należy zastosować:

```
sys = feedback(sys1,sys2,+1)
```

Zadanie 6.
Oblicz transmitancję zastępczą *Gsys* dla połączenia szeregowego, równoległego i ujemnego sprzężenia zwrotnego, zakładając, że transmitancje obiektów *sys1* i *sys2* są dane jako:

$$G_{sys1}(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+1} \qquad G_{sys2}(s) = \frac{1}{s^3+s^2-2s+1}$$

7. Sprawozdanie

W sprawozdaniu przedstaw krótko podstawowe sposoby reprezentacji układów LTI w Matlabie. Podaj rozwiązania wszystkich zadań wraz z wynikami i kodem źródłowym.